Шварца

$$\frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\alpha_k^2}{2(z-a_k)^2} - \frac{M_k}{z-a_k}. \tag{2}$$

Находя производную Шварца отображения f из уравнения (1) и сравнивая ее с правой частью уравнения (2), получаем следующее представление для параметров M_k:

$$M_k = -\sum_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{\gamma_k\gamma_j}{a_k - a_j} + \frac{1}{\pi}\lim_{z\to a_k}(z-a_k)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k}{z-a_k}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{1}{\omega(\tau)-z}d\theta(\tau) - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{1}{\omega(\tau)-z}d\theta(\tau)\right)^2 + \sum_{k=1}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{1}{\left(\omega(\tau)-z\right)^2}d\theta(\tau)\right).$$

Настоящая работа выполнена при поддержке Программы повышения международной конкурентоспособности Томского государственного университета на 2013-2020 гг.

Литература

1. Куфарев П. П. *Об одном специальном семействе однолистных функций* // Ученые записки Томского университета. – 1947. – Т. 5. – С. 22–36.

2. *Труды П.П. Куфарева. К 100 летию со дня рождения* / Под общ. ред. И.А. Александрова. – Томск: Изд-во НТЛ, 2009. – 372 с.

CONFORMAL MAPPING OF A HALF-PLANE ONTO A CIRCULAR POLYGON

I.A. Kolesnikov

In this paper we obtain an integro-differential equation for mapping of half-plane onto a circular polygon. Using this equation and the Schwarz differential equation, we get a representation for the accessory parameters M_k.

Keywords: conformal mapping, accessory parameters, circular polygon.

УДК 514.752.44:514.772:517.548

ИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ НА НЕГЛАДКИХ СКЛЕЙКАХ ДВУМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

А.Н. Кондрашов[1]

1 *alexander.kondrashov@volsu.ru*; Волгоградский государственный университет

Исследуется вопрос о существовании и единственности изотермических координат на склеенных поверхностях в $\mathbb{R}^m$. Такие поверхности являются специальным случаем негладких поверхностей; для них установлен аналог известной теоремы В.М. Миклюкова (2004).

Ключевые слова: изотермические координаты, склееные поверхности, функции склейки.

Вопрос о существовании изотермических координат на гладких поверхностях хорошо изучен, а возможность их введения оказывается чрезвычайно полезной во многих вопросах. В то же время вопрос о введении изотермических координат на негладких поверхностях оказывается весьма тонким. В основном конформные отображения негладких поверхностей изучались лишь в специальных случаях [3]–[7].

Новейшие исследования казалось бы классической задачи о существовании изотермических координат на двумерных поверхностей в $\mathbb{R}^m$, только на современном этапе негладких или имеющих разного рода патологию в строении, была инициирована в [1, 2]. Интерес к изотермическим координатам на негладких поверхностях вполне объективен ввиду перспектив практического применения в вычислительных задачах, поскольку именно в таких координатах во многих случаях удобно производить построение расчётных сеток. С другой стороны, как отмечалось в предисловии к монографии [2]: "Это просто удивительно, что при наличии наикрасивейшей и богатейшей теории конформных отображений плоских областей соответствующая теория конформных отображений поверхностей вплоть до настоящего времени так и не представлена связным изложением." Наше исследование направлено на развитие такой теории.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область и $\mathscr{X}$ – двумерная поверхность в $\mathbb{R}^m$, $(m \geq 3)$, заданная посредством непрерывной вектор-функции

$$y = f(x) = (f_1(x_1, x_2), \ldots, f_m(x_1, x_2)) : D \to \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

реализующей гомеоморфное отображение области D на множество $f(D)$ с метрикой (и, тем самым, топологией!), индуцированной из $\mathbb{R}^m$.

Далее всегда предполагаем, что отображение f имеет полный дифференциал df п.в. в D, причём п.в. в D выполнено

$$\operatorname{rank}(df) = 2. \tag{2}$$

Символами $f_{x_1}(x)$, $f_{x_2}(x)$ будем обозначать частные производные вектор-функции f:

$$f_{x_1}(x) = (f_{1x_1}(x), \ldots, f_{mx_1}(x)), \quad f_{x_2}(x) = (f_{1x_2}(x), \ldots, f_{mx_2}(x)).$$

Пользуясь стандартными обозначениями $E = |f_{x_1}|^2$, $F = \langle f_{x_1}, f_{x_2} \rangle$, $G = |f_{x_2}|^2$, определяем в D метрику (первую квадратичную форму)

$$ds^2 = E dx_1^2 + 2F dx_1 dx_2 + G dx_2^2$$

с измеримыми коэффициентами E, F, G.

Определение 1. *Пусть $\mathscr{X}$ – поверхность, заданная над областью $D \subset \mathbb{R}^2$ посредством вектор-функции* (1)*, подчиненной условию* (2)*. Переменные x_1, x_2 называются изотермическими координатами на поверхности $\mathscr{X}$, если*

$$E(x) = G(x), \quad F(x) = 0$$

п.в. в D.

В случае, когда x_1, x_2 – изотермические координаты на поверхности $\mathscr{X}$, мы имеем

$$ds^2 = \lambda^2(x)(dx_1^2 + dx_2^2), \text{ где } \lambda^2(x) = E(x) = G(x).$$

Нам потребуется также понятие $W^{1,2}$-мажорируемой функции.

Определение 2. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область. Будем говорить, что функция $P : D \to \mathbb{R}$ является $W^{1,2}$ -мажорируемой в D, если найдется функция $K \in W^{1,2}(D)$ такая, что*

$$P(x) \le K(x) \quad \textit{для п.в.} \quad x \in D.$$

Определение 3. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область. В случае когда функция $P : D \to \mathbb{R}$ является $W^{1,2}$ -мажорируемой во всякой подобласти $D' \Subset D$ будем говорить, что функция P является $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ -мажорируемой в D.*

$W^{1,2}$ -мажорируемость (см. [1, замечание §6]) означает, что равенство

$$\lim_{\xi \to x} P(\xi) = +\infty$$

может выполняться на очень редком множестве. Можно утверждать, например, что при любом $\alpha > 0$ его α-ёмкость равна нулю.

Всюду далее будем использовать обозначения: $O = (0,0)$, $\Xi = (1,0) \in \mathbb{R}^2$, $B(O,R)$ – открытый круг радиуса $R > 0$ в $\mathbb{R}^2$ с центром в начале координат O.

В [1] была установлена теорема о существовании и единственности изотермических координат на односвязной негладкой поверхности.

Теорема 1 (В.М. Миклюков). *Пусть $\mathscr{X}$ – двумерная поверхность, заданная вектор-функцией* (1) *над односвязной ограниченной областью $D \subset \mathbb{R}^2$ и удовлетворяющая условию* (2). *Предположим, что функция P, определяемая соотношением*

$$P(x) = \frac{E(x) + G(x)}{\sqrt{E(x)G(x) - F^2(x)}},$$

является $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-мажорируемой в области D.

Тогда существует гомеоморфизм $x = \Phi(\xi) : B(O,R) \to D$, где $R > 1$, $\Phi(\xi) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(B(O,R))$, вводящий на $\mathscr{X}$ изотермические координаты ξ_1, ξ_2.

Гомеоморфизм $x = \Phi(\xi)$ определяется единственным образом заданием пары точек $a, b \in D$ таких, что $a = \Phi(O)$, $b = \Phi(\Xi)$.

Установлены аналоги теоремы Миклюкова для поверхностей, склеенных из нескольких кусков.

В дальнейшем поверхности $\mathscr{X} = (D, f)$, заданные над односвязной областью $D \subset \mathbb{R}^2$, у которых отображение $f : D \to f(D)$ взаимно однозначно, дифференцируемо п.в. и выполняется условие (2), будем называть *элементарными*.

Мы будем предполагать, что односвязная поверхность $\mathscr{X} \subset \mathbb{R}^m$ представляет собой склейку элементарных односвязных поверхностей $\mathscr{X}_i = (G_i, f_i)$, заданных гомеоморфизмами $f_i : G_i \to f_i(G_i) \subset \mathbb{R}^m$. Если $\{\mathscr{X}_i\}_{i=1}^n$ набор элементарных односвязных поверхностей занумерованный в порядке склейки, то результат их склейки обозначим $\mathscr{X}_{1\ldots n}$.

Будем обозначать $\Gamma_{ij} \subset \partial G_i$ – множество точек по которым G_i склеивается с G_j и $\Gamma_i \subset \partial G_i$ – множество *всех* точек участвующих в склейке.

Для учёта поведения поверхности $\mathscr{X}_{1\dots n}$ вблизи мест склеек нам необходимо дать несколько определений.

Определение 4. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область и $\mathscr{C} \subset \partial D$ – множество составленное из набора непересекающихся открытых дуг. Пусть $F \subset D$ подмножество. Будем говорить, что F* компактно примыкает *к $\mathscr{C}$, если $\overline{F} \bigcap \partial D \Subset \mathscr{C}$. Здесь $\overline{F}$ замыкание F в $\mathbb{R}^2$, а отношение "$\Subset$" берется в смысле топологии $\mathscr{C}$.*

Факт компактного примыкания будем записывать в виде "$F \Subset \mathscr{C}|D$".

Определение 5. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^2$, граница которой ∂D содержит множество Γ, представляющее собой некоторую совокупность непересекающихся открытых дуг. Будем говорить, что функция $P : D \to \mathbb{R}$ является $W^{1,2}_{\mathrm{loc},\Gamma}$*-мажорируемой*, если для всякой подобласти $D' \subset D$ предкомпактной в $\mathbb{R}^2$ и такой, что или $D' \Subset D$, или $D' \Subset \Gamma|D$, найдется функция $K \in W^{1,2}(D')$ такая, что*

$$P(x) \le K(x) \quad \text{для п.в.} \quad x \in D.$$

Определение 6. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – односвязная область, граница ∂D которой содержит дугу γ являющуюся частью некоторой квазипрямой Γ. Если D целиком лежит в одной из компонент связности $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, то будем называть γ, Γ* внешне расположенными *по отношению к D.*

Теорема 2. *Пусть определена склейка $\mathscr{X}_{1\dots n}$, где $\mathscr{X}_i = (G_i, f_i)$, для которой $\Gamma_i, \Gamma_{ij} \subset \partial G_i$ – соответствующие множества склейки, а $\varphi_{ij} : \Gamma_{ij} \to \Gamma_{ji}$ – склеивающие граничные гомеоморфизмы.*

Предположим, что: 1) все компоненты связности Γ_i являются дугами квазипрямых внешне расположенных по отношению к G_i; 2) имеется набор квазиконформных гомеоморфизмов $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, склеивающих области $\{G_i\}_{i=1}^n$; 3) каждая функция

$$P_i(x^{(i)}) = \frac{E_i(x^{(i)}) + G_i(x^{(i)})}{\sqrt{E_i(x^{(i)})G_i(x^{(i)}) - F_i^2(x^{(i)})}}$$

$W^{1,2}_{\mathrm{loc},\Gamma_i}$-мажорируема в G_i.

Тогда на поверхности $\mathscr{X}_{1\dots n}$ существуют изотермические координаты $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in B(O,R)$, $R > 1$, определяемые единственным образом выбором соответствия: $a \longleftrightarrow O$, $b \longleftrightarrow \Xi$. Здесь $a \in G_{i_0} \bigcup \Gamma_{i_0}$, $b \in G_{j_0} \bigcup \Gamma_{j_0}$ – некоторые фиксированные точки, при этом, либо $i_0 = j_0$ и $a \ne b$, либо $i_0 \ne j_0$ и $b \ne \varphi_{i_0 j_0}(a)$.

Определение 7. *Пусть определена склейка $\mathscr{X}_{1\dots n}$, где $\mathscr{X}_i = (G_i, f_i)$, $(i = 1, \dots, n)$. Пусть Γ_i, $\Gamma_{ij} \subset \partial G_i$, $\varphi_{ij} : \Gamma_{ij} \to \Gamma_{ji}$ – соответствующие множества склейки и склеивающие граничные гомеоморфизмы. Предположим, что для Γ_i, Γ_{ij}, φ_{ij} определена склейка областей $\{G_i\}_{i=1}^n$, осуществляемая набором квазиконформных гомеоморфизмов $h_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ таких, что отображения $\widehat{\varphi}_{ij} : h_i(\Gamma_{ij}) \to h_j(\Gamma_{ji})$ делающие диаграмму*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{ij} & \xrightarrow{\varphi_{ij}} & \Gamma_{ji} \\ {\scriptstyle h_i}\downarrow & & {\scriptstyle h_j}\downarrow \\ h_i(\Gamma_{ij}) & \xrightarrow{\widehat{\varphi}_{ij}} & h_j(\Gamma_{ji}) \end{array}$$

коммутативной, являются квазиизометриями. Такую склейку областей будем называть специальной квазиконформной склейкой.

Теорема 3. *Пусть* $\mathscr{X}_{1\ldots n}$ *– склейка поверхностей* $\mathscr{X}_i = (G_i, f_i)$, $(i = 1, \ldots, n)$, *причём всякая область из набора* $\{G_i\}_{i=1}^n$ *является квазидиском. Пусть* Γ_i, $\Gamma_{ij} \subset \partial G_i$ *– соответствующие множества склейки, а* $\varphi_{ij} : \Gamma_{ij} \to \Gamma_{ji}$ *– соответствующие склеивающие граничные гомеоморфизмы. Предположим, что каждая функция*

$$P_i(x^{(i)}) = \frac{E_i(x^{(i)}) + G_i(x^{(i)})}{\sqrt{E_i(x^{(i)})G_i(x^{(i)}) - F_i^2(x^{(i)})}}$$

$W^{1,2}_{\mathrm{loc},\Gamma_i}$*-мажорируема в* G_i.

Если для Γ_i, Γ_{ij}, φ_{ij} *определена специальная квазиконформная склейка областей* $\{G_i\}_{i=1}^n$, *то на поверхности* $\mathscr{X}_{1\ldots n}$ *существуют изотермические координаты* $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in B(O, R)$, $R > 1$, *определяемые единственным образом выбором соответствия:* $a \longleftrightarrow O$, $b \longleftrightarrow \Xi$. *Здесь* $a \in G_{i_0} \bigcup \Gamma_{i_0}$, $b \in G_{j_0} \bigcup \Gamma_{j_0}$ *– некоторые фиксированные точки, при этом, либо* $i_0 = j_0$ *и* $a \neq b$, *либо* $i_0 \neq j_0$ *и* $b \neq \varphi_{i_0 j_0}(a)$.

Литература

1. Миклюков В. М. *Изотермические координаты на поверхностях с особенностями* // Матем. сб. – 2004. – Т. 195, № 1. – С. 69–88.

2. Миклюков В. М. *Конформное отображение нерегулярной поверхности его применения.* – Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2005. – 272 с.

3. Carathéodory C. *Conformal representation.* – London: Cambridge Univ. Press, 1932. – 105 p.

4. Решетняк Ю Г. *Двумерные многообразия ограниченной кривизны* // Геометрия - 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. 1989. – Т. 70. – М.: ВИНИТИ, 1989. – С. 7–189.

5. Toro T. *Surfaces with generalized second fundamental form in* L^2 *are Lipschitz manifolds* // J. Differential Geom. – 1994. – V. 39. – P. 65-101.

6. Müller S., Sverák V. *On surfaces of finite total curvature* // J. Differential Geom. – 1995. – V. 42. – P. 229-258.

7. Грудский И. М. *Построение внутренних координат на составных римановых поверхностях* // В сб.: Дифференциальные, интегральные уравнения и комплексный анализ. – Элиста, 1986. – С. 30–45.

ISOTHERMIC COORDINATES ON IRREGULAR SEWING SURFACES

A.N. Kondrashov

We investigate existence and uniqueness of isothermic coordinates on sewing surfaces in $\mathbb{R}^m$. *The such surfaces form is special case of irregular surfaces. We obtaine an analog of the famous theorem of V.M. Miklukov (2004) for such surfaces.*

Keywords: isothermic coordinates, sewing surfaces, sewing functions.